Дополнительные замечания к решению задач и представлению этих решений в отчете.

Описание алгоритма должно быть полным. В качестве критерия полноты выступает простая проверка: следуя алгоритму надо получить конкретный конечный результат.

Рассмотрим выполнение задания 4 ПР1. В задании указано, что требуется получить алгоритм моделирования случайных чисел, которые распределены непрерывно по закону Рэлея, используя метод обратных функций. Параметры распределения заданы. Задана, в частности, функция распределения вероятности:

Согласно общей методике, приведённой в ПР1 ранее, необходимо решить уравнение:

(1)

, где – функция распределения вероятности по заданному распределению; – искомое, моделируемое по заданному закону распределения, число; – базовое случайное число, которое распределено непрерывно по равномерному закону на отрезке .

Надо в это уравнение общего вида подставить конкретную функцию распределения вероятностей. Получим уравнение:

(2)

Его надо решить относительно . Полученная формула даёт основу алгоритма моделирования по методу обратных функций.

Далее даём описание алгоритма, какой-нибудь вариант (любая задача может иметь не один алгоритм решения).

Если нам надо смоделировать 20 значений случайных чисел, то мы предпринимаем следующие действия:

1. Моделируем 20 базовых случайных чисел (РР(0;1)), т.е. получаем выборку .

2. Вычисляем по полученной формуле выборку 20-ти моделируемых случайных чисел , где каждое значение соответствует своему базовому С.Ч.

Другой вариант применения алгоритма – это его реализация в цикле. В теле цикла производятся следующие действия:

1. Генерируется базовое псевдослучайное число ;

2. По формуле получают соответствующее случайное число .

Если базовое число генерируется алгоритмически в виде функции, то функцию можно подставить в формулу, сократив запись алгоритма до одного действия.

Эту задачу решите самостоятельно, т.е. получите аналитически формулу, решив уравнение (1) относительно .

|  |
| --- |
| В качестве примера, приведу подобную задачу, которая решается в ЛБ1 для моделирования случайных временных промежутков, которые распределены непрерывно по экспоненциальному закону. Функция распределения вероятности экспоненциального закона имеет вид:  Уравнение (2) в этом случае после подстановки данной функции принимает вид:  (3)  Получим решение уравнения (3) относительно .  Преобразуем уравнение переносом слагаемых к виду:  (4)  Возьмём логарифмы по натуральному основанию к обеим частям уравнения (4) (тождественное преобразование), и получим уравнение вида:  (5)  Из (5) получим аналитическое решение (формулу) для определения :  или  Оба вида формул справедливы: – С.Ч. РР(0;1) и эквивалентны (при случайной генерации).  Эта формула получена методом обратных функций. Формулы используются для моделирования случайных интервалов времени между поступлением заявок в систему и случайной потребности во времени обслуживания каждой поступающей заявки в лабораторной работе ЛБ1 при имитационном моделировании случайного поведения систем массового обслуживания (или, точнее, развития случайных процессов в этих Q-схемах). |

Рассмотрим выполнение задания 5 ПР1. В задании требуется смоделировать случайные натуральные числа, распределённые дискретно по геометрическому закону. Распределение имеет бесконечное, но счётное множество исходов, образующее полную сумму несовместных событий.

Если представить распределение не в виде последовательности, как в задании, а таблично, получим, учитывая, что :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | 1 | 2 | … | k | … |  |
|  |  |  | … |  | … |  |

Значения вероятностей в распределении убывают с возрастанием N.

|  |
| --- |
| Такое распределение используется, в частности, при имитационном моделировании случайных промежутков времени, каждый из которых пропорционален некоторому такту, или обратно пропорционально частоте выполнения дискретных операций, как в компьютере: , где – случайное натуральное число, подчинённое геометрическому распределению; – такт операций; – частота выполнения дискретных операций. |

Сумма всех вероятностей по множеству исходов равно:

Этот вывод вытекает из определения значения суммы членов геометрической прогрессии при знаменателе меньшем 1, а также в силу того, что . По этой причине, также, распределение называют геометрическим. Таким образом, полное (бесконечное) множество несовместных исходов представляет полную группу событий.

Давайте по шагам рассмотрим логику конструирования алгоритма имитационного моделирования случайных чисел по этому распределению. Дискретные распределения моделируются методом «жребия».

В пособии приведена упрощенная схема алгоритма для моделирования дискретного распределения на три исхода:



Главный смысл этой схемы состоит в том, чтобы показать, что разбиение отрезка [0;1] на отрезки, длина которых равна вероятностям заданного дискретного распределения, и использование базовых С.Ч., распределенных непрерывно по равномерному закону РР(0;1), позволяет имитировать случайный выбор с вероятностью (или частотой), соответствующей заданному закону. Для этого устанавливается, в какой из интервалов попадает сгенерированное базовое случайное число.

Алгоритм жребия можно описать следующим образом:

1. Генерируем базовое случайное число . Оно попадает равновероятно в какую-нибудь точку отрезка .

2. Проверяем последовательно, начиная, например, с левого края отрезка , в какой интервал разбиения указанного отрезка попадает сгенерированное число, и делаем выбор по схеме:

Если , то производим выбор

Если , то производим выбор

Если , то производим выбор

…

Если , то производим выбор

…

и так далее. Перебор условий прерывается при установлении актуального выбора.

Здесь был использован тот факт, что границы интервалов равны частным суммам членов последовательности, которые вычисляются через применение формул для частных сумм членов геометрической прогрессии.

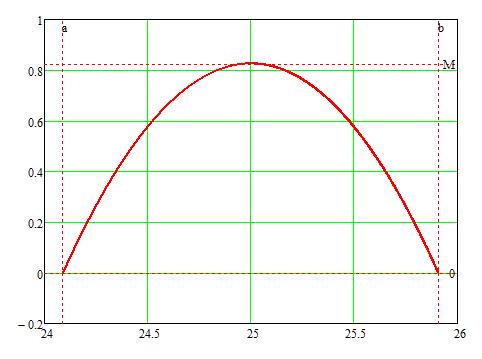
Перебор условий можно вести и с правого края. Для оптимизации алгоритма по трудоёмкости возможно применение более сложных комплексных схем.

Можете убедиться на представленных примерах, что проектирование алгоритмов, логично опирается на основные правила, и не представляет сложной задачи в данных примерах.

**Задание 3.**

В задании дано непрерывное распределение, имеющее функцию плотности: , где y – моделируемая случайная величина.

График этой функции имеет вид, представленный на рисунке:



Требуется описать алгоритм моделирования выборки случайных чисел, подчиняющихся этому закону методом усечения Неймана.

**При использовании метода Немана всегда используют функцию распределения плотности вероятности** (см. примечание).

Первый шаг решения состоит в выборе функции плотности распределения.

Усечение состоит в ограничении диапазона наблюдаемых значений случайной величины. Во многих распределениях эти диапазоны неограниченые: . В данной задаче диапазон наблюдаемых значений конечный: .

Второй шаг решения состоит в заключении функции плотности распределения в ограниченном диапазоне в прямоугольник, см. рис., верхняя сторона которого проходит по моде (максимальному значению) функции плотности. В данной задаче величина функции в моде равна: .

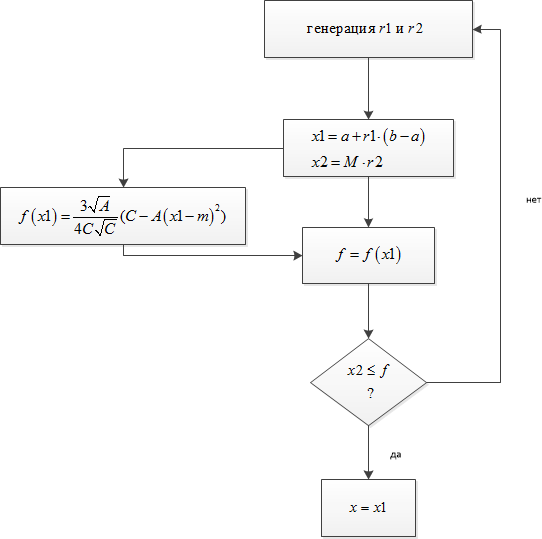
Далее, с использованием равномерного распределения, разыгрывается случайная точка внутри прямоугольника: по горизонтальной оси (значения случайных величин в усечённом диапазоне) – координата ; а по вертикальной оси (значения функции плотности распределения) – координата , где – случайные числа, непрерывно распределённые по равномерному закону в диапазоне . Данные формулы представляют метод обратных функций для координат .

Если разыгранная случайная точка попадает под кривую, т.е. выполняется условие , то случайная координата принимается как искомое случайное число, распределённое по заданному закону (соответствующему функции плотности вероятности). В противном случае, повторяют розыгрыш случайной точки до выполнения указанного условия.

Схема алгоритма имеет вид, приведённый ниже на рисунке.

Этот алгоритм показывает способ моделирования одного числа. При необходимости получения выборки случайных чисел его надо повторять многократно, например в цикле.

То, что получаемые числа удовлетворяют заданному закону распределения, обосновывается геометрически. Так случайные точки при розыгрыше равномерно попадают в любую область прямоугольника, то частота попадания в любую область под кривой будет пропорциональна площади этой области под кривой. В то же время, см. примечание, эта площадь равна вероятности появления случайной координаты точки в отрезок значений, ограничивающий рассматриваемую область под кривой снизу.



|  |
| --- |
| **Примечание:**  Плотность вероятности устанавливает распределение отношения вероятности наблюдения случайной величины в некотором интервале в окрестности любой точки диапазона возможных значений к величине этого интервала:  , где  – вероятность наблюдения случайной величины в окрестности точки . Нахождение этой точки в центре окрестности не имеет значения. Важным является нахождение точки внутри или у границы окрестности, фиксация событий наблюдения случайной величины внутри окрестности. Эмпирически вероятность нахождения случайной величины в окрестности заданной точки оценивается частотой наблюдения, и может быть записано как предел этой частоты при увеличении числа испытаний до : , где – общее число испытаний (наблюдений); – число наблюдений случайной величины внутри установленной окрестности при проведении испытаний (наблюдений).  Таким образом, функция распределения плотности вероятности определяет распределение частоты наблюдения случайной величины в окрестности отдельных значений.  Из определения следует, что вероятность нахождения случайной величины в окрестности какого-либо значения равна приближенно:  Точность равенства растет при уменьшении размера окрестности .  Если суммировать эти вероятности, начиная с левой границы распределения до некоторого значения , то получим функцию распределения вероятности нахождения наблюдаемых значений случайной величины слева от заданного значения : . В таком смысле определяется интегральная функция, или функция распределения вероятности любого распределения. Функция вероятности есть первообразная функции плотности вероятности. Функция плотности вероятности поэтому может быть определена как производная функции вероятности: . |

**Практика 2**

В практике моделируется случайный процесс, связанный с комплексной помехой, которая искажает сигнал в канале связи. Физические причины помехи – эффект многолучевого приёма. В учебном задании применяется упрощённая модель.

Исходный сигнал – простой гармонический, и представляется формулой:

, где

– постоянная амплитуда;

– постоянная круговая частота;

– постоянная амплитуда;

– время.

Помеха влияет на амплитуду сигнала через коэффициент замирания и на фазу сигнала. Эти величины меняются случайным образом, меняясь скачкообразно от одного периода квазистабильности к другому, причём внутри периодов квазистабильности коэффициент замирания и фаза остаются постоянными. Длительность периодов квазистабильности, которые следуют друг за другом, также является случайными величинами. Формула моделируемого в данной учебной задаче зашумлённого сигнала имеет вид:

, где

– случайный процесс изменения величины коэффициента замирания;

– случайный процесс изменения величины фазы сигнала.

Данная называется комплексной, потому что она не является в чистом виде или аддитивной, или мультипликативной, т.е. классифицируется так по виду формулы.

Таким образом, случайный процесс характеризуется случайными длительностями периодов квазистабильности, которые последовательно сменяют друг друга, и случайными значениями коэффициента замирания и фазы , которые остаются постоянными внутри периодов и меняются скачкообразно от периода к периоду.

Моделирование методом Неймана коэффициента замирания , распределённого по закону Рэлея.

Правая граница диапазона (усечение) рассчитывается из принципа, чтобы вероятностью наблюдения величины правее была настолько малой, чтобы ей можно было пренебречь.

Функция плотности вероятности закона Рэлея:

Для этого решается уравнение, построенное на функции плотности вероятности закона Рэлея:

, где – заданное граничное значение функции.

В задаче мы принимаем

Окончательно вид уравнения:

Уравнение не имеет аналитического решения в элементарных функциях. Найдём его численное решение. При заданном в задании значении параметра корень . Поэтому принимаем .

Максимальное значение функции плотности вероятности закона Рэлея в диапазоне равно моде, и определяется при значении :

Таким образом, мы вычислили размеры прямоугольника, в который заключается функция для моделирования по методу Неймана.